Практикалық сабақ №7

Тақырыбы: Екі еселі интегралда айнымалыларды алмастыру.

Мақсаты: Екі еселі интегралда айнымалыларды алмастыру. Екі еселі интегралда полярлық координаттарға көшу.

Мысал 1. $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, D - бірінші квадрантта жататын $x^2+y^2=4$ дөңгелегінің бөлігі $\left(0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$. Осы интегралды есептеу керек.

Шешуі: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ формулаларынан

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix};\quad J(u,v)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r.$$

Сондықтан,

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 e^{r^2}rdr=\frac{1}{2}(e^4-1)\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{1}{2}(e^4-1)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(e^4-1).$$

Мысал 2. $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy$ интегралын есепте, егер $D: x+y=1,\ x-y=-1,\ x+y=3,\ x-y=1$ түзулерімен шенелген аймақ болса.

Шешуі: Айталық, $x+y=u,\ x-y=v$ болсын, онда $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$. Ал түрлендіру Якобианы

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2};\ |J|=\frac{1}{2}.$$

Сондықтан,

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D'}u^3v^2dudv,\quad D':1\le u\le 3,\ -1\le v\le 1$$

$$\frac{1}{2}\iint_{D'}u^3v^2dudv=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3du\int_{-1}^1 v^2dv=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3\cdot\frac{1}{3}v^3\Big|_{-1}^1 du=\frac{1}{12}u^4\Big|_1^3=\frac{20}{3}.$$

Мысал 3. $y=0$, $y=x$ түзулерімен және $x^2+y^2=2x$ шеңберімен шектелген жазық облыстың ауданын есептеңдер.

Шешуі: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ поляр координатын енгіземіз. Сонда облысты шектейтін шеңбердің теңдеуі $\rho = 2\cos\varphi$ болады, мұндағы $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. ρ нөлден $2\cos\varphi$ – ге дейін өзгереді. Сонда

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Аудиториялық жұмысы: Екі еселі интегралда айнымалыларды алмастыру: [8] №№ 3938, 3940, 3943, 3948, 3951, 3954, 3957, 4175.

Үй жұмысы

№№ 3937, 3941, 3944, 3950, 3953, 3955, 3958.